Краткие сообщения ОИЯИ № 3[60]-93 *JINR Rapid Communications No.3[60]-93*
УДК 530.12:531.51

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ С ДВУМЯ АФФИННЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ

Н.А.Черников

За счет введения в теорию тяготения фоновой связности устранена нежелательная зависимость плотности энергии гравитационного поля от выбора координатной карты. Дано определение релятивистской теории. Является ли теория релятивистской или не является, зависит от вида полевого объекта, а не фонового. На основе полевой и фоновой связностей развивается релятивистская теория тяготения. В случае, когда фоновая связность примитивна, развиваемая теория в существенной своей части совпадает с эйнштейновской теорией, в противном случае она выходит за рамки последней.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Relativistic Theory of Gravity with Two Affine Connections

N.A.Chernikov

By introducing a background connection in the theory of gravity the author removes undesirable dependence of the energy density of the gravitational field on the choice of a coordinate map. The definition of the relativistic theory is given. Whether a theory is relativistic or not depends on the type of the field rather than background object. The relativistic theory of gravity is developed on the basis of the field and background connections. When the background connection is primitive, the developed theory essentially coincides with Einstein one otherwise it goes beyond the latter.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Сообщение Лемюэля Гулливера о грядущей судьбе теории тяготения я уже опубликовал (см. [1]). Что касается теории относительности, то вот что знал о ней Джубал Хэршо, другой герой из мира фантастики: «Хэршо припомнил, какой трагедией для многих ученых оказалась теория относительности. Не в состоянии переварить ее, они нашли выход в травле Эйнштейна. Но в итоге они оказались в тупике...» [2,с. 150].

Не считаю полезным делом выступать ни против теории относительности, ни против теории тяготения Эйнштейна. Более того, принимая теорию Эйнштейна за основу, стараюсь дополнить ее и, в меру сил своих, развить.

1. Основные положения теории

Эйнштейновская теория тяготения состоит из двух частей. Ее первая часть характеризуется метрическим тензором g_{ab} и тензором массы M_{ab}, которые связываются тензорным уравнением

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi \gamma M_{ab}. \tag{1}$$

Размерность многообразия, на котором рассматриваем тензоры и аффинные связности, полагаем равной четырем. Их компоненты в каждой координатной карте x^1, x^2, x^3, x^4 многообразия относим к базису $d^a = dx^a$ и кобазису $\partial_a = \partial / \partial x^a$.

Первая часть теории Эйнштейна, имея ярко выраженный тензорный характер, не вызывает возражений. Назовем ее гильбертовской частью эйнштейновской теории, так как она полностью совпадает с теорией Гильберта.

Вторая же часть эйнштейновской теории тяготения имеет псевдотензорный характер, за что ее порицают, хотя благодаря как раз такому ее характеру во второй части решается проблема энергии гравитационного поля. Главный критический аргумент: плотность энергии в эйнштейновской теории зависит от выбора координатной карты. Действительно, плотность энергии, определяемая псевдотензором Эйнштейна, в любой наперед заданной точке при подходящем выборе координат вместе с аффинной связностью

$$\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2} g^{as}(\partial_m g_{sn} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn}) \tag{2}$$

обращается в нуль, так как и сам псевдотензор Эйнштейна [3, с.205; 4, с.103], будучи квадратичной формой относительно этой связности, вместе с (2) обращается в нуль.

Между тем в работах [5] показано, что понятие псевдотензора Эйнштейна можно примирить с тензорным анализом, если наряду с (2) ввести еще одну аффинную связность без кручения. Назовем ее фоновой и обозначим $\check{\Gamma}^a_{mn}$. Что до связности (2), мы будем называть ее полевой. Фоновая связность определяется уравнениями свободного движения материальной точки (в отсутствие гравитационного поля), а полевая — уравнениями свободного падения материальной точки (в гравитационном поле). Тензоры кривизны R^a_{mnb} и $\check{R}^a_{mnb}$, задаваемые связностями Γ^a_{mn} и $\check{\Gamma}^a_{mn}$, соответственно равны

$$R^{a}_{mnb} = \partial_m \Gamma^{a}_{nb} - \partial_n \Gamma^{a}_{mb} + \Gamma^{a}_{ms}\Gamma^{s}_{nb} - \Gamma^{a}_{ns}\Gamma^{s}_{mb},$$

$$\check{R}^{a}_{mnb} = \partial_m \check{\Gamma}^{a}_{nb} - \partial_n \check{\Gamma}^{a}_{mb} + \check{\Gamma}^{a}_{ms}\check{\Gamma}^{s}_{nb} - \check{\Gamma}^{a}_{ns}\check{\Gamma}^{s}_{mb}. \tag{3}$$

Свернутые тензоры кривизны R_{ab} и $\check{R}_{ab}$ определим как

$$R_{ab} = R^{s}_{sab}, \quad \check{R}_{ab} = \check{R}^{s}_{sab}. \tag{4}$$

Заменив эйнштейновский псевдоскалярный лагранжиан

$$g^{mn}(\Gamma^{a}_{mb}\Gamma^{b}_{an} - \Gamma^{a}_{ab}\Gamma^{b}_{mn}) \tag{5}$$

гравитационного поля на скалярный лагранжиан

$$\mathfrak{L} = g^{mn}(P^{a}_{mb}P^{b}_{an} - P^{a}_{ab}P^{b}_{mn}), \tag{6}$$

где

$$P^{a}_{mn} = \check{\Gamma}^{a}_{mn} - \Gamma^{a}_{mn}, \tag{7}$$

и сохранив без каких-либо изменений лагранжиан «материи», получаем следующий рецепт перехода от эйнштейновской к новой теории тяготения. В гравитационном уравнении (1) тензор R_{ab} надо заменить на разность

$$S_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}(\check{R}_{ab} + \check{R}_{ba}). \tag{8}$$

В результате получится новое гравитационное уравнение

$$S_{ab} - \frac{1}{2} S_{mn} g^{mn} g_{ab} = 8\pi \gamma M_{ab}. \tag{9}$$

В эйнштейновских псевдотензорах, как и (5), полиномиально зависящих от связности Кристоффеля (2), последнюю надо заменить на разность (7). В результате вместо *псевдо-* получаются истинные тензоры. В частности, вместо эйнштейновского псевдоскаляра (5) получается скаляр (6). Новая теория гравитации не вступает в противоречие с тензорным анализом, так как разность двух любых аффинных связностей является тензором. В теории аффинных связностей тензор (7) называется тензором аффинной деформации [6]. Условия гармоничности, на которых настаивал В.А.Фок [7, с.239], в новой теории выглядят следующим образом:

$$\Phi^{a} = 0, \tag{10}$$

где

$$\Phi^{a} = g^{mn} P^{a}_{mn}. \tag{11}$$

Поэтому вектор Φ^a будем называть вектором ангармоничности.

Тензор, получающийся по этому рецепту из вышеупомянутого псевдотензора Эйнштейна, равен

$$V_b^a = \Phi_b^{mn}(P_{mn}^{\ a} - P_m \delta_n^a) - \mathfrak{L}\,\delta_b^a, \tag{12}$$

где

$$P_m = P_{ma}^{\ a}, \tag{13}$$

δ_b^a — единичный аффинор, называемый символом Кронекера, Φ_a^{mn} — тензор ангармоничности, равный

$$\Phi_a^{mn} = g^{ms}P_{sa}^{\ n} + g^{ns}P_{sa}^{\ m} - g^{mn}P_a. \tag{14}$$

Тензор энергии гравитационного поля выражается через тензор (12) следующим образом:

$$E_b^a = -\frac{c^2}{16\pi\gamma}V_b^a. \tag{15}$$

Располагая двумя связностями, для каждого тензора T составляем две ковариантные производные ∇T и $\check{\nabla} T$. Тензор (7) можно представить в виде

$$P_{mn}^{\ a} = -\frac{1}{2}g^{as}(\check{\nabla}_m g_{sn} + \check{\nabla}_n g_{sm} - \check{\nabla}_s g_{mn}), \tag{16}$$

а тензор (14) — в виде

$$\Phi_a^{mn} = (\check{\nabla}_a - P_a)\,g^{mn}. \tag{17}$$

Вектор (11) можно представить в виде

$$\Phi^a = \Phi_n^{an} = (\check{\nabla}_n - P_n)\,g^{na}. \tag{18}$$

Интересно равенство

$$\nabla_a g^{an}(\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn}) - \nabla_b g^{mn}\check{R}_{mn} =$$

$$= (\check{\nabla}_a - P_a)[g^{an}(\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn})] - g^{mn}\check{\nabla}_b\check{R}_{mn}. \tag{19}$$

С его помощью из гравитационного уравнения (9) нетрудно получить следствие

$$(\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn})\Phi^n = 0, \tag{20}$$

коль скоро тензор массы M_{ab} не зависит от фоновой связности, а сама фоновая связность удовлетворяет условию

$$\check{\nabla}_a(\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn}) = 0. \tag{21}$$

2. Эйнштейновская теория как частный случай

Изложенная теория содержит эйнштейновскую как частный случай. Действительно, если

$$(\check{R}_{ab} + \check{R}_{ba}) = 0, \tag{22}$$

то уравнение (9) совпадает с уравнением (1), а при более сильном условии

$$\check{R}^{a}_{mnb} = 0 \tag{23}$$

найдется такая координатная карта, где всюду

$$\check{\Gamma}^{a}_{mn} = 0. \tag{24}$$

В такой карте тензор (12) совпадает с эйнштейновским псевдотензором.

Так вот, свободное движение материальной точки в пространстве Евклида задает фоновую связность, при которой выполняется условие (23). Следовательно, при такой связности выполняется и условие (22).

Причиной потери фоновой связности в эйнштейновской теории явилась недооценка физиками понятия аффинной связности в период становления общей теории относительности. В своем энциклопедическом обзоре [4] молодой тогда Паули следующим образом выразил бытовавшее отношение к этому понятию: «Ради полноты приведем еще следующую общую формулу, которая, однако, в физике не играет никакой роли. Из тензора a при дифференцировании получается тензор высшего ранга ∇a. Эта операция, найденная еще Кристоффелем, названа Риччи и Леви-Чивита *ковариантным дифференцированием*» (выделено самим Паули) [4, с.88]. Кстати, отметив, что эйнштейновские псевдотензоры ведут себя как тензоры по отношению к аффинным преобразованиям, Паули назвал их аффинными тензорами [4, с.89]. Выделение же группы аффинных преобразований задает примитивную связность, т.е. аффинную связность без кривизны и кручения, а это и есть та самая фоновая связность, которую потерял Эйнштейн.

Подчеркнем, что примитивная связность определяет аффинную геометрию и никакой метрики в определяемом ею аффинном пространстве не задает. Напротив, можно указать целый класс неодинаковых метрик, задающих одну и ту же примитивную аффинную связность. Действительно, пусть в некоторой карте y все компоненты фоновой связности равняются нулю. Тогда в произвольно взятой карте x ее компоненты равны

$$\check{\Gamma}^{a}_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial y^s} \frac{\partial^2 y^s}{\partial x^m \partial x^n}. \tag{25}$$

Нетрудно убедиться в том, что тензор кручения и тензор кривизны этой связности равняются нулю, так что эта связность примитивна. Как видно, в формуле (25) метрика отсутствует. Однако компоненты (25) можно представить в виде скобок Кристоффеля для метрики

$$C_{mn} \frac{\partial y^m}{\partial x^a} \frac{\partial y^n}{\partial x^b} dx^a dx^b = C_{mn} dy^m dy^n, \tag{26}$$

где компоненты C_{mn} не зависят от координат y, а определитель $|C_{mn}|$ не равен нулю. В остальном компоненты C_{mn} произвольны. Например, две до очевидности разные (в действительной области) метрики

$$\sum_{m=1}^{4} \frac{\partial y^m}{\partial x^a} \frac{\partial y^m}{\partial x^b} dx^a dx^b = \sum_{m=1}^{4} dy^m dy^m \tag{27}$$

и

$$\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial y^m}{\partial x^a} \frac{\partial^{\,m}}{\partial x^b} dx^a dx^b - \frac{\partial y^4}{\partial x^a} \frac{\partial y^4}{\partial x^b} dx^a dx^b =$$

$$= \sum_{m=1}^{3} dy^m dy^m - dy^4 dy^4 \tag{28}$$

задают одну и ту же связность с компонентами (25). Но связность с компонентами (25), повторяем, не определяет метрики. Она инвариантна относительно аффинных подстановок

$$y^s = A^s_r y^r + B^s \tag{29}$$

и задает аффинную (а не метрическую) геометрию. Таким образом, термин «биметрический формализм», широко распространившийся после известной работы [8], страдает скрытым изъяном: для теории тяготения важно наличие фоновой связности, а не фоновой метрики. Что до работы [8], то и в ней в существенно важных формулах фигурирует не сама фоновая метрика вида (26), а лишь производные от нее скобки

Кристоффеля вида (25), представляющие примитивную фоновую связность. Таким образом, вопреки утверждению, фактически сделанному в работе [8], Эйнштейн потерял не фоновую метрику, а нечто меньшее — всего лишь фоновую связность.

Как же тогда понимать слова «релятивистская теория»? Так вот, понятие о релятивистской теории составляется вовсе не на основе фонового объекта, а на основе полевого. Да и то сказать, если бы это понятие составлялось на основе фонового объекта, то сам Эйнштейн, потеряв фоновый объект, не смог бы решить, является ли его теория тяготения релятивистской или не является. Между тем можно дать следующее определение: та или иная теория называется релятивистской, если предполагается существование в ней полевой метрики и если можно подобрать такие линейные формы $f^a = f^a_m dx^m$, что полевая метрика приведется к виду

$$g_{ab}dx^a dx^b = f^1 f^1 + f^2 f^2 + f^3 f^3 - c^2 f^4 f^4, \tag{30}$$

где c — константа, равная скорости света. Это значит, что в каждой точке пространства — времени касательное пространство скоростей является пространством Лобачевского с характерной для него константой, равной c. В случае же евклидова пространства скоростей теория называется нерелятивистской. О понятии касательного пространства скоростей см. работу [9].

В заключение заметим, что если условие (22) не выполняется, то изложенная здесь в разделе 1 теория выступает в бесспорно новом виде.

Литература

1. Черников Н.А. — Препринт ОИЯИ Р2-85-157, Дубна, 1985; В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып.17. М.: Энергоатомиздат, 1986, с.24.
2. Хайнлайн Э. — Чужак в чужой стране. Перевод с англ. Н.Коптюг. М.: Изд-во ДО «Глаголь», 1992. (Robert Heinlein. Stranger in a Strange Land, 1961).
3. Эйнштейн А., Громмер Я. (1927). — В кн.: А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966, т.2, с.198.
4. Паули В. (1921). — Теория относительности. М.: Наука, 1991.
5. Черников Н.А. — ЭЧАЯ, 1987, т.18, вып.5, с.1000. Препринты ОИЯИ Р2-88-27, Р2-88-778, Дубна, 1988. Сообщения ОИЯИ Р2-87-683, Дубна, 1987, Р2-89-182, Р2-89-224, Дубна, 1989. Труды I семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны», ОИЯИ, Р2-89-138, Дубна, 1989.

6. Норден А.П. — Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
7. Фок В.А. — Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
8. Rosen N. — Phys. Rev., 1940, 57, p.147.
9. Черников Н.А. — Геометрия Лобачевского как физическая наука. В сб.: 150 лет геометрии Лобачевского. М.: ВИНИТИ, 1977, с.146.

Рукопись поступила 16 апреля 1993 года.